GOU, An	Théorème d'Abel angulaire	L 207 L223 L 235 L 243 L 241 L 230

Th d'Abel angulaire : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de $RC = 1$, telle que $\sum a_n$ CV. On note f la somme de cette dernière sur $\mathbb{D}$.
Soit $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}[$ et $\Delta_\alpha = \{z \in \mathbb{D} : \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\alpha, \alpha] : z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$
alors $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_\alpha}} f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Démonstration : On note $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$; $S = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$; $R_n = S - S_n$.
Pour majorer $f(z) - S$, on va effectuer une transformation d'Abel.
Remarquons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = R_{n-1} - R_n$. Soit $z \in \mathbb{D}$, $\forall N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n (z^n - 1) = \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n).(z^n - 1) = \sum_{n=1}^{N} R_{n-1}(z^n - 1) - \sum_{n=1}^{N} R_n (z^n - 1)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=0}^{N} R_n (z^n - 1) = \sum_{n=0}^{N} R_n (z^{n+1} - z^n) - R_N (z^N - 1) = (z-1) \sum_{n=0}^{N} R_n z^n - R_N (z^N - 1)$$

qd $N \to \infty$, on obtient : $f(z) - S = (z-1). \sum\limits_{n=0}^{\infty} R_n z^n$.

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $|R_n| \leq \varepsilon$.
Soit $z \in \Delta_\alpha$, $\exists \rho > 0$, $\exists \theta \in [-\alpha, \alpha]$, $z = 1 - \rho e^{i\theta}$,
alors $|z|^2 = (1 - \rho e^{i\theta}).(1 - \rho e^{-i\theta}) = 1 - 2\rho \cos\theta + \rho^2$.

On a donc
$$|f(z) - S| \leq |z-1|. \left|\sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n\right| + |z-1|. \left|\sum_{n=N}^{\infty} R_n z^n\right|$$
$$\leq |\rho e^{i\theta}|. \sum_{n=0}^{N-1} |R_n| + |\rho e^{i\theta}|. \varepsilon . \sum_{n=N}^{\infty} |z|^n$$
$$\leq \rho . C^{ste} + \frac{\rho \varepsilon}{1 - |z|} \leq \rho C^{ste} + \rho \varepsilon . \frac{1 + |z|}{1 - |z|^2}$$
$$\leq \rho . C^{ste} + \frac{2\rho\varepsilon}{2\rho\cos\theta - \rho^2}.$$

On choisit $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{C^{ste}} ; \cos(\alpha)\} > 0$

alors, $\forall z \in \Delta_\alpha$ tq $\rho \leq \delta$, $|f(z) - S| \leq \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{2\cos\alpha - \cos\alpha} \leq \varepsilon\left(1 + \frac{2}{\cos\alpha}\right)$

d'où $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_\alpha}} f(z) = S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Th taubérien faible : Soit $\sum a_n z^n$ une SE de $RC = 1$, de somme f.

On suppose que : $\exists S \in \mathbb{C} : \lim_{x \to 1^-} f(x) = S$;

Si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum_{n \geq 0} a_n$ cv et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$.

Démonstration : $\forall n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

On a $\forall x \in]0,1[$, $|S_n - f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k (1-x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k\right|$

$$\leq |1-x| . \sum_{k=1}^{n} |a_k| . |1+x+\dots+x^{k-1}| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| . |x|^k$$

$$\leq (1-x) . \sum_{k=1}^{n} k . |a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k}{n} . |a_k| . |x|^k$$

$$\leq (1-x) n . \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k . |a_k| + \frac{1}{n(1-x)} . \sup_{k>n} k |a_k| .$$

Or par hypothèse, $k . |a_k| \to 0$,

D'une part, par le th de Césaro, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k . |a_k| \to 0$,

D'autre part, $\sup_{k>n} k |a_k| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Ainsi $\exists N' \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N'$, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k |a_k| < \varepsilon$ et $\sup_{k>n} k |a_k| < \varepsilon$

En particularisant en $x = 1 - \frac{1}{n} \in]0,1[$, on obtient :

$$\left|S_n - f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{n} . n . \varepsilon + \frac{1}{1} . \varepsilon = 2\varepsilon$$

D'après les hypothèses, $f(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} S$

donc $\exists N'' \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N''$, $\left|f\left(1-\frac{1}{n}\right) - S\right| \leq \varepsilon$

On pose $N = \max\{N', N''\}$, alors $\forall n \geq N$,

$$|S_n - S| \leq \left|S_n - f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| + \left|f\left(1-\frac{1}{n}\right) - S\right| \leq 3\varepsilon .$$

Donc (S_n) converge, et $\lim_{n \to \infty} S_n = S$.